შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 190

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$. თუ $x=y=0 \Rightarrow$

$f(0+0\cdot f(0))=f(f(0))+0\cdot f(0)$

$f(0)=f(f(0))$. $f(0)=S$, $S=f(S)$.

თუ $x=y=1 \Rightarrow$

$f(1+f(1))=f(f(1))+f(1)$. $f(1)=P$

$f(1+P)=f(P)+f(1)$.

თუ $x=y$ $\Rightarrow$

$f(x+xf(x))=f(f(x))+xf(x)$ $f(x)=a$,

$f(x+xa)=f(a)+xa$.

თუ $x=0 \Rightarrow$

$f(yf(0))=f(f(0))$ $f(0)=r$. $f(yr)=f(r)$

თუ $x=1 \Rightarrow$

$f(1+yf(1))=f(f(1))+f(y)$.

თუ $y=0 \Rightarrow$

$f(x)=f(f(x))+xf(0)$

თუ $y=1$

$f(x+f(x))=f(f(x))+xf(1)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

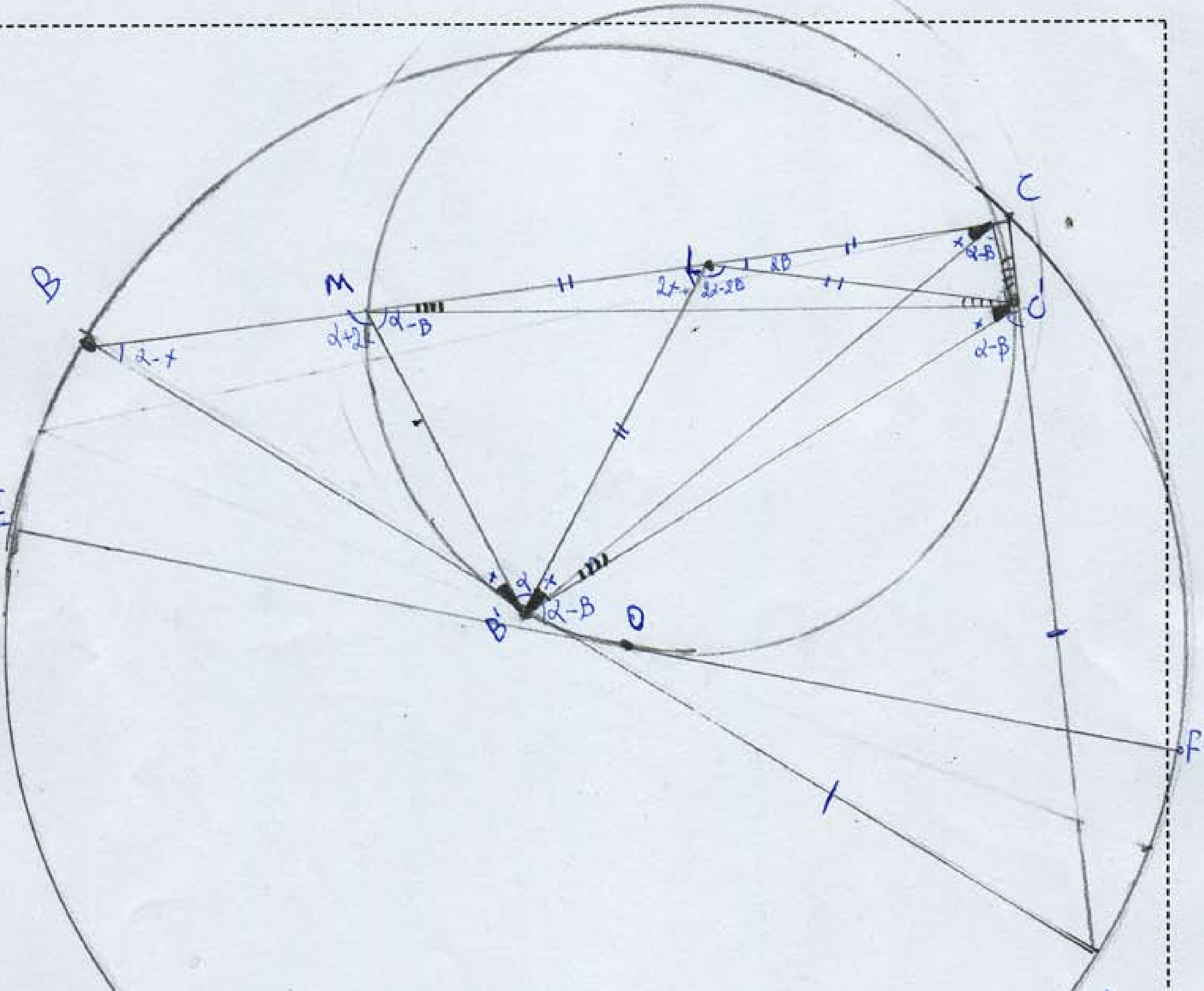
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 190

ამოცანა № 2

გვერდი № 1.



$AB = AC'$

$\angle = \beta.$

$\alpha + x = 90.$

EF ეხება O-ზეთან.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 190

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

თუ, $a=1,\ b=0,\ c=0.$ (ანუ ერთი არანულოვანია).

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{1-2\cdot 1+5}=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{26}{40}.$$

თუ, $c=0,\ a+b=1.$ (ანუ ერთი ნულია)

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{(a-1)^2+4}+\frac{1}{(b-1)^2+4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{(a-1)^2+4}+\frac{1}{a^2+4}$$

$$a=\frac{1}{2}+x,\quad a-1=x-\frac{1}{2},\quad x\neq 0\neq\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{x^2+\frac{1}{4}+x+4}+\frac{1}{x^2+\frac{1}{4}-x+4}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{x^2+x+\frac{17}{4}}+\frac{1}{x^2-x+\frac{17}{4}}=\frac{1}{5}+4\cdot\left(\frac{1}{4x^2+17+4x}+\frac{1}{4x^2+17+4x}\right)=$$

$$=\frac{1}{5}+8\left(\frac{4x^2+17}{(4x^2+17)^2-16x^2}\right).\qquad \frac{1}{5}+8\cdot\left(\frac{4x^2+17}{16x^4-120x^2+17^2}\right)\ ?\ \frac{57}{85}$$

თუ $a=b=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{5}+\frac{1}{\frac{1}{4}+4}\cdot 2=\frac{57}{85}$

$$8\cdot\left(\frac{4x^2+17}{16x^4-120x^2+17^2}\right)\ ?\ \frac{8}{17}$$

$$4x^2\cdot 17+17^2\ ?\ 16x^4-8\cdot x^2\cdot 15+17^2$$

$$0\ ?\ 16x^4-x^2\cdot 52$$

$$0\ ?\ x^2(16x^2-52)=4x^2\cdot(4x^2-13).$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 190

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$4x^2 \neq 0.$

$4x^2-13=0$

$x^2=\frac{13}{4}=3+\frac{1}{4}.$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{3+\frac{1}{4}}$

$+\sqrt{3+\frac{1}{4}}>1$

$0>-\sqrt{3+\frac{1}{4}}$

თუ $a,b,c\neq 0,1$ $\quad (m^2+n^2\leq(m+n)^2$?

$\frac{1}{a^2-2a+5}=\frac{1}{(a-1)^2+2^2}\quad\frac{1}{(a+1)^2}$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(a-1)^2+2^2}\overset{HM}{\geq}\frac{9}{(a-1)^2+2^2\cdot3+(b-1)^2+(c-1)^2}=\frac{9}{a^2+b^2+c^2+13}=\frac{9}{14}.$$

$a^2+b^2+c^2\leq(a+b+c)(a+b+c)=1.$ Cauchy-Schwartz

აქ $a=b=c=\frac{1}{3}$

$3\cdot\frac{1}{\frac{40}{9}}=\frac{27}{40}.$